1 组合结构与生成函数

1.1 组合类

定义 1.1.1 一个**组合类** $(\mathcal{A}, f)$ 是一个可数集 $\mathcal{A}$ 配有一个**大小函数** $f : \mathcal{A} \to \mathbb{N}$，其中的元素称为**组合对象**。记 $|\alpha| := f(\alpha), \alpha \in \mathcal{A}$ 表示大小函数的值。

下面记
$$\mathcal{A}_n = \{\alpha \in \mathcal{A} : |\alpha| = n\}$$
表示组合类中大小为 n 的对象构成的子类。由此定义计数数列的概念。

定义 1.1.2 定义组合类 $\mathcal{A}$ 的**计数数列** $\{A_n\}$ 是一个非负整数数列，满足 $A_n = \mathrm{card}(\mathcal{A}_n)$，即
$$A_n = \mathrm{card}\,\{\alpha \in \mathcal{A} : |\alpha| = n\}\,.$$

作为区分，以上定义的组合类亦称**无标号组合类**。

1.2 无标号体系

1.2.1 普通生成函数

定义 1.2.1.1 一个组合类 $\mathcal{A}$ 的**普通生成函数 (OGF)** $A(z)$ 是一个形式幂级数，满足
$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n.$$
根据计数数列 A_n 的定义，我们也可以把 $\mathcal{A}$ 的 OGF 写成
$$A(z) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} z^{|\alpha|}.$$
这样的形式其组合意义是明显的：将每一组合对象的大小放到不定元的指数上求和。

我们知道，组合计数研究的是某一大小的组合对象的数目，而生成函数正是将大小为 n 的组合对象写作是一个单项式 z^n，由此体现组合对象的大小这一关键信息。因此一个组合类的 OGF 浓缩了整个组合类的计数信息。

1.2.2 无标号组合类的基本运算

定义 1.2.2.1

- 如果组合类 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 满足其计数数列 $\{A_n\} = \{B_n\}$，则称它们相等，记作 $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$ 或 $\mathcal{A} = \mathcal{B}$。
- 一系列组合类 $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ 具有笛卡尔积
$$\mathcal{A} = \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i,$$
其中元素形如 $(\alpha_i)_{i \in I}, \alpha_i \in \mathcal{A}_i$，自然有投影映射 $\mathbf{Pr}_j : \prod_{i \in I} \mathcal{A}_i \to \mathcal{A}_j$；大小函数定义为
$$|(\alpha_i)_{i \in I}|_{\mathcal{A}} = \sum_{i \in I} |\alpha_i|_{\mathcal{A}_i}.$$

- 一系列组合类 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ 具有无交并
$$\mathcal{A}=\coprod_{i\in I}\mathcal{A}_i,$$
其元素形如 (α,j)，表示组合对象 α 来自 $\mathcal{A}_j$，由此有自然的嵌入映射 $\iota_j:\mathcal{A}_j\to\coprod_{i\in I}\mathcal{A}_i$；而大小函数则定义为
$$|(\alpha,j)|_{\mathcal{A}}:=|\alpha|_{\mathcal{A}_j}.$$

笛卡尔积 $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ 的意义是从 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 中分别取出一个元素组成新的组合对象，由此构成一个新组合类；而无交并的意义则是将两个组合类的元素放到一起，组成新的组合类。

另可定义 $\mathcal{A}^n:=\prod_{i=1}^n\mathcal{A}$ 以及 $n\mathcal{A}:=\coprod_{i=1}^n\mathcal{A}$。由此我们可以定义幺半环 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 上组合类 $\mathcal{A}$ 的形式幂级数集合 $\mathbb{Z}_{\geq 0}[\![\mathcal{A}]\!]$，其中 $\mathcal{A}^0$ 的意义将在下文给出。

命题 1.2.2.2 设有一族组合类 $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$，则
$$\mathcal{A}=\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i\implies A(z)=\prod_{i\in I}\mathcal{A}_i(z),$$
$$\mathcal{A}=\coprod_{i\in I}\mathcal{A}_i\implies A(z)=\sum_{i\in I}\mathcal{A}_i(z).$$

其中“组合类进行笛卡尔积，对应生成函数相乘”可看作是广义的乘法原理，而“组合类进行无交并，对应生成函数相加”则可看作是广义的加法原理。

1.2.3 无标号组合类的基本构造

定义 1.2.3.1

- **中性类** $\mathcal{E}$ 是生成函数 $E(z)=1$ 的组合类，它仅包含空对象。显见
$$\mathcal{A}\cong\mathcal{E}\times\mathcal{A}\cong\mathcal{A}\times\mathcal{E}.$$
特别地，中性类 $\mathcal{E}$ 可视作是 $\mathcal{A}^0$；我们记 ϵ 为空元素，则 $\mathcal{E}$ 也可表示为 $\{\epsilon\}$。
- **原子类** $\mathcal{Z}_\circ=\{\circ\},\mathcal{Z}_\bullet=\{\bullet\}$ 是仅包含一个元素的组合类，生成函数 $Z(z)=z$。

我们需对生成函数作进一步讨论。首先，根据组合意义，显然生成函数的系数应当是非负整数。进一步，组合类的运算保证了生成函数的系数总是非负整数，于是任一生成函数 $A(z)$ 都在环 $\mathbb{Z}[\![z]\!]$ 之中。然而这个环性质不佳，故我们通常在扩环 $\mathbb{C}[\![z]\!]$ 甚至域 $\mathbb{C}(\!(z)\!)$ 上考虑；使用这个记号也是出于一些历史上的原因。

Sequence 构造 设 $\mathcal{A}$ 是满足 $A_0=0$ 的组合类，则其 Sequence 构造是
$$\operatorname{SEQ}(\mathcal{A})=\mathcal{E}+\mathcal{A}+(\mathcal{A}\times A)+(\mathcal{A}\times\mathcal{A}\times\mathcal{A})+\cdots,$$
其组合意义为
$$\operatorname{SEQ}(\mathcal{A})=\{(\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell):\ell\geq 0,\,\alpha_j\in\mathcal{A}\}.$$

设 $\mathcal{A}=\textsc{Seq}(\mathcal{B})$，则

$$A(z)=\sum_{n=0}^{\infty}B(z)^n=\frac{1}{1-B(z)}.$$

我们之所以要求 $A_0=0$，一方面是保证 $1/(1-B(z))$ 收敛，另一方面只有如此，该构造的组合意义才明确。

Cycle 构造 设 $\mathcal{A}$ 是 $A_0=0$ 的组合类，则其 Cycle 构造是

$$\textsc{Cyc}(\mathcal{A}):=(\textsc{Seq}(\mathcal{A})\{\epsilon\})/\mathbf{S},$$

其中 $\mathbf{S}$ 是圆排列的等价类

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)\,\mathbf{S}\,(\beta_1',\cdots,\beta_r'),\qquad \beta_i'=\beta_{1+(j-1+d)\bmod r}.$$

Multiset 构造 设 $\mathcal{A}$ 是 $A_0=0$ 的组合类，则其 Multiset 构造是

$$\text{M}\textsc{Set}(\mathcal{A}):=\textsc{Seq}(\mathcal{A})/\mathbf{R},$$

其中 $\mathbf{R}$ 是任意置换下的等价关系

$$(\beta_1,\cdots,\beta_r)\,\mathbf{R}\,(\beta_1',\cdots,\beta_r')\iff \exists\sigma\in\mathfrak{S}_r,\ \beta_j=\sigma(\beta_j'),\ \forall j\le r.$$

其组合意义为

$$\text{M}\textsc{Set}(\mathcal{A})=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}:\ell\ge 0,\ \alpha_j\in\mathcal{A}\}.$$

Powerset 构造 设 $\mathcal{A}$ 是 $A_0=0$ 的组合类，则其 Powerset 构造是 $\mathcal{A}$ 中所有有限子集构成的组合类。换言之，$\mathcal{A}$ 的 Powerset 构造 $\text{P}\textsc{Set}(\mathcal{A})\subset\text{M}\textsc{Set}\mathcal{A}$ 定义为

$$\text{P}\textsc{Set}(\mathcal{A}):=\{\{\alpha_1,\cdots,\alpha_\ell\}:\ell\ge 0,\ \alpha_j\in\mathcal{A},\ \beta_j\ \text{互不相等}\}.$$

定理 1.2.3.2

$$\mathcal{A}=\textsc{Seq}(\mathcal{B})\implies A(z)=\frac{1}{1-B(z)}$$

$$\mathcal{A}=\text{P}\textsc{Set}(\mathcal{B})\implies A(z)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{n\ge1}(1+z^n)^{B_n}\\ \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}B(z^k)\right)\end{cases}$$

$$\mathcal{A}=\text{M}\textsc{Set}(\mathcal{B})\implies A(z)=\begin{cases}\displaystyle\prod_{n\ge1}(1-z^n)^{-B_n}\\ \exp\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}B(z^k)\right)\end{cases}$$

$$\mathcal{A}=\textsc{Cyc}(\mathcal{B})\implies A(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(k)}{k}\log\frac{1}{1-B(z^k)}$$

证明 有关 Sequence 构造的等式在之前已写明。对于 Powerset 构造，一个显然的观察是

$$\mathrm{PSET}(\mathcal{B}) \cong \prod_{\beta\in\mathcal{B}} (\{\epsilon\} + \{\beta\}),$$

于是

$$A(z) = \prod_{\beta\in\mathcal{B}} \left(1 + z^{|\beta|}\right) = \prod_{n\geq 1} (1+z^n)^{B_n}.$$

于是

$$\begin{aligned} A(z) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \log(1+z^n)\right) \\ &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^{nk}}{k}\right) \\ &= \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \sum_{n=1}^{\infty} B_n z^{nk}\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} B(z^k)\right). \end{aligned}$$

对于 Multiset 构造，利用类似的组合意义可得

$$\mathrm{MSET}(\mathcal{B}) \cong \prod_{\beta\in\mathcal{B}} \mathrm{SEQ}(\{\beta\}),$$

于是

$$A(z) = \prod_{\beta\in\mathcal{B}} \left(1 - z^{|\beta|}\right)^{-1} = \prod_{n\geq 1} (1-z^n)^{-B_n}.$$

使用同样的手段得

$$\begin{aligned} A(z) &= \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n \log(1-z^n)^{-1}\right) \\ &= \exp\left(\frac{B(z)}{1} + \frac{B(z^2)}{2} + \frac{B(z^3)}{3} + \cdots\right). \end{aligned}$$

最后来看 Cycle 构造，记 σ 表示圆排列的置换。求 $\sum_{i=1}^{N} w(O_i)$，其中 $\langle\sigma\rangle$ 作用于 $\mathcal{B}^n$ 上。运用带权 Burnside 引理

$$\sum_{i=1}^{N} w(O_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{(\beta_i)_{i\leq n}\in\psi(\sigma^k)} w((\beta_i)_{i\leq n}),$$

而 σ^k 是 (k,n) 个 $n/(k,n)$-轮换之积，所以就有

$$\sum_{i=1}^{N} w(O_i) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} B\left(z^{n/(k,n)}\right)^{(k,n)} = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) B\left(z^d\right)^{n/d}.$$

于是

$$\begin{aligned} A(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) B\left(z^d\right)^{n/d} \\ &= \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\varphi(d)}{d} \sum_{n\geq 1} \frac{B\left(z^d\right)^n}{n} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\varphi(d)}{d} \log \frac{1}{1-B(z^d)}. \end{aligned}$$

□